中級ミクロ経済学 I（再履修）　5 月 16 日授業内課題

問題作成者：北村　友宏

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 財 2 種類（1 と 2），消費者 2 人（A と B）の交換経済を考える．消費者 A の効用関数は

$$u_A(x_1, x_2) = 2\ln x_1 + 3\ln x_2$$

のように与えられ，消費者 B の効用関数は

$$u_B(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1} + \sqrt{x_2}$$

のように与えられている．また，消費者 A の初期保有は $(0, 4)$ であり，消費者 B の初期保有は $(5, 0)$ である．このとき，ワルラス均衡における価格比 p_1/p_2 を求めなさい．ただし，$p_1 > 0, p_2 > 0$ である．

授業内課題解答

解答作成者：北村　友宏

※答案には重要な計算過程を示していればよい．ここまで詳しく説明する必要はない．

1. 消費者 A の効用最大化問題は，

$$\max_{x_1, x_2} 2\ln x_1 + 3\ln x_2,$$
$$\text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = 4p_2.$$

財 1 の限界効用 $MU_{A1}(x_1, x_2)$ は，

$$MU_{A1}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_A(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2 \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{2}{x_1}.$$

財 2 の限界効用 $MU_{A2}(x_1, x_2)$ は，

$$MU_{A2}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_A(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 3 \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{3}{x_2}.$$

接線条件より，最適消費プランでは，

$$\begin{aligned}
-\frac{MU_{A1}(x_1, x_2)}{MU_{A2}(x_1, x_2)} = -\frac{p_1}{p_2} &\Leftrightarrow -\frac{2/x_1}{3/x_2} = -\frac{p_1}{p_2} \\
&\Leftrightarrow \frac{2/x_1}{3/x_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{両辺 } \times(-1) \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{x_1} \cdot \frac{x_2}{3} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{左辺の分母と分子 } \times\frac{x_2}{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3} x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1 \qquad \text{両辺 } \times x_1 \\
&\Leftrightarrow x_2 = \frac{3p_1}{2p_2} x_1. \qquad \text{両辺 } \times\frac{3}{2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

(1) を消費者 A の予算線の式に代入すると，

$$\begin{aligned}
p_1 x_1 + p_2 \cdot \frac{3p_1}{2p_2} x_1 = 4p_2 &\Leftrightarrow p_1 x_1 + \frac{3p_1}{2} x_1 = 4p_2 \\
&\Leftrightarrow 2p_1 x_1 + 3p_1 x_1 = 8p_2 \qquad \text{両辺 } \times 2 \\
&\Leftrightarrow 5p_1 x_1 = 8p_2 \\
&\Leftrightarrow x_1 = \frac{8p_2}{5p_1}.
\end{aligned}$$

よって，消費者 A の最適消費プランでの財 1 の消費量は $\frac{8p_2}{5p_1}$.
消費者 B の効用最大化問題は，

$$\max_{x_1, x_2} \sqrt{2x_1} + \sqrt{x_2},$$
$$\text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = 5p_1.$$

$t(x_1) = 2x_1$ とすると，

$$u_B(x_1, x_2) = \sqrt{t(x_1)} + \sqrt{x_2}.$$

よって，財 1 の限界効用 $MU_{B1}(x_1, x_2)$ は，

$$MU_{B1}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_B(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}[t(x_1)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{2}(2x_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

財 2 の限界効用 $MU_{B2}(x_1, x_2)$ は，

$$MU_{B2}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_B(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}.$$

接線条件より，最適消費プランでは，

$$\begin{aligned}
-\frac{MU_{B1}(x_1, x_2)}{MU_{B2}(x_1, x_2)} = -\frac{p_1}{p_2} &\Leftrightarrow -\frac{(2x_1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{p_1}{p_2} \\
&\Leftrightarrow \frac{(2x_1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{p_1}{p_2} && \text{両辺 } \times(-1) \\
&\Leftrightarrow \frac{2^{-\frac{1}{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}}{2^{-1}x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{p_1}{p_2} \\
&\Leftrightarrow 2^{-\frac{1}{2}+1}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2} && \text{左辺の分母と分子 } \times 2x_2^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2} \\
&\Leftrightarrow x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{p_1}{p_2} && \text{両辺 } \times 2^{-\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow x_1^{-1}x_2 = 2^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 && \text{両辺 2 乗} \\
&\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1. && \text{両辺 } \times x_1 \qquad (2)
\end{aligned}$$

(2) を消費者 B の予算線の式に代入すると，

$$\begin{aligned}
p_1x_1 + p_2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1 = 5p_1 &\Leftrightarrow p_1x_1 + \frac{1}{2}p_2 \cdot \frac{p_1^2}{p_2^2}x_1 = 5p_1 \\
&\Leftrightarrow x_1 + \frac{1}{2}p_2 \cdot \frac{p_1}{p_2^2}x_1 = 5 && \text{両辺 } \div p_1 \\
&\Leftrightarrow x_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{p_1}{p_2}x_1 = 5 \\
&\Leftrightarrow 2p_2x_1 + p_1x_1 = 2p_2 \cdot 5 && \text{両辺 } \times 2p_2 \\
&\Leftrightarrow 2p_2x_1 + p_1x_1 = 10p_2 \\
&\Leftrightarrow (2p_2 + p_1)x_1 = 10p_2 \\
&\Leftrightarrow x_1 = \frac{10p_2}{2p_2 + p_1}.
\end{aligned}$$

よって，消費者 B の最適消費プランでの財 1 の消費量は $\dfrac{10p_2}{2p_2 + p_1}$.

財 1 の実行可能性制約より，

$$
\begin{aligned}
\frac{8p_2}{5p_1}+\frac{10p_2}{2p_2+p_1}=0+5 &\Leftrightarrow \frac{8p_2}{5p_1}+\frac{10p_2}{2p_2+p_1}=5 \\
&\Leftrightarrow 8p_2(2p_2+p_1)+10p_2\cdot 5p_1=5\cdot 5p_1(2p_2+p_1) && \text{両辺 }\times 5p_1(2p_2+p_1) \\
&\Leftrightarrow 16p_2^2+8p_1p_2+50p_1p_2=25p_1(2p_2+p_1) \\
&\Leftrightarrow 16p_2^2+8p_1p_2+50p_1p_2=50p_1p_2+25p_1^2 \\
&\Leftrightarrow 16p_2^2+8p_1p_2=25p_1^2 && \text{両辺 }-50p_1p_2 \\
&\Leftrightarrow 16+8\cdot\frac{p_1}{p_2}=25\cdot\frac{p_1^2}{p_2^2} && \text{両辺 }\div p_2^2 \\
&\Leftrightarrow 25\cdot\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2-8\cdot\frac{p_1}{p_2}-16=0.
\end{aligned}
$$

$p_1>0, p_2>0$ なので，

$$
\frac{p_1}{p_2}=\frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-25\cdot(-16)}}{25}=\frac{4+\sqrt{16+400}}{25}=\frac{4+\sqrt{416}}{25}=\frac{4+4\sqrt{26}}{25}.
$$

よって，ワルラス均衡における価格比は $\dfrac{4+4\sqrt{26}}{25}$.

- 【検算（答案への記載は不要）】

  財 2 の実行可能性制約を確認する．そのために，まず各消費者の最適消費プランでの財 2 の消費量を求める．

  消費者 A の最適消費プランでの財 1 の消費量 $\dfrac{8p_2}{5p_1}$ を (1) に代入すると，消費者 A の最適消費プランでの財 2 の消費量は，

$$
x_2=\frac{3p_1}{2p_2}\cdot\frac{8p_2}{5p_1}=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}.
$$

  消費者 B の最適消費プランでの財 1 の消費量 $\dfrac{10p_2}{2p_2+p_1}$ を (2) に代入すると，消費者 B の最適消費プランでの財 2 の消費量は，

$$
x_2=\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\cdot\frac{10p_2}{2p_2+p_1}=\frac{p_1^2}{p_2^2}\cdot\frac{5p_2}{2p_2+p_1}=\frac{5p_1^2}{p_2(2p_2+p_1)}.
$$

  財 2 の実行可能性制約より，

$$
\begin{aligned}
\frac{12}{5}+\frac{5p_1^2}{p_2(2p_2+p_1)}=4+0 &\Leftrightarrow \frac{12}{5}+\frac{5p_1^2}{p_2(2p_2+p_1)}=4 \\
&\Leftrightarrow \frac{5p_1^2}{p_2(2p_2+p_1)}=\frac{20}{5}-\frac{12}{5} \\
&\Leftrightarrow \frac{5p_1^2}{p_2(2p_2+p_1)}=\frac{8}{5} \\
&\Leftrightarrow 5p_1^2\cdot 5=8\cdot p_2(2p_2+p_1) && \text{両辺 }\times 5p_2(2p_2+p_1) \\
&\Leftrightarrow 25p_1^2=16p_2^2+8p_1p_2 \\
&\Leftrightarrow 25\cdot\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2-8\cdot\frac{p_1}{p_2}-16=0.
\end{aligned}
$$

$p_1 > 0, p_2 > 0$ なので，ワルラス均衡における価格比は，

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{4 + 4\sqrt{26}}{25}$$

となり，財 1 の実行可能性制約を利用して求めた価格比と同じになる．